Комбинаторная теория чисел

1) Натуральный ряд разбит на несколько целочисленных арифметических прогрессий. Докажите, что начальное значение одной из этих прогрессий делится на её разность.

2) Докажите, что для любого простого числа p найдутся натуральные числа a и b, для которых $a^2 + b^2 + 1$ делится на p.

3) Множество натуральных чисел разбито на конечное количество подмножеств. Докажите, что одно из этих подмножеств (назовем его S) обладает следующим свойством: для любого натурального числа n S содержит бесконечно много чисел кратных n.

4) Натуральные числа от 1 до 100 покрасили в несколько цветов так, что отношение двух разных чисел одного цвета не может быть целым. Какое наименьшее количество цветов могли для этого использовать?

5) Дано простое число $p > 2$. Докажите, что числа $1!, 2!, \ldots, (p-1)!, p!$ дают больше, чем $\sqrt{p}$ различных остатков при делении на p.

6) Из всех остатков от деления на натуральное $n > 1$ выбрали больше $3n/4$ остатков. Докажите, что существуют целые a, b, c, для которых остатки всех семи чисел a, b, c, $a+b$, $b+c$, $a+c$, $a+b+c$ являются выбранными.

7) Бесконечная последовательность натуральных чисел строится по следующему правилу: a_1 =2014, для $n \geq 1$ $a_{n+1} = a_n + p_n$, где p_n - наибольший простой делитель a_n. Докажите, что в этой последовательности найдется число кратное 2015.

8) Покажите, что среди любых 11 целых чисел можно выбрать 6 так, что их сумма будет делиться на 6.

9) Какое наибольшее количество несократимых дробей со знаменателями, меньшими данного натурального n, может лежать на интервале длины $1/n$?

10) Пусть $a_1, a_2, \ldots$ - последовательность целых чисел, которая содержит бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Известно, что для каждого натурального n числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дают n разных остатков при делении на n. Докажите, что каждое целое число встречается в этой последовательности ровно один раз.

11) Назовем усложнением числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли число, из которого нельзя получить полный квадрат с помощью ста усложнений?

Задачи связанные с алгеброй и делимостью

1) Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Может ли число $a + b + c + d$ быть простым?

2) Пусть $a_1 = 2$, a_2 —наименьшее натуральное число, для которого $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < 1$, a_3 —наименьшее натуральное число, для которого $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} < 1$ и т.д. Докажите, что для каждого натурального числа n выполнено равенство $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$.

3) Известно, что для некоторых натуральных a и b число $\frac{a^4-1}{b+1} + \frac{b^4-1}{a+1}$ целое. Докажите, что $a^{2012}b^{2012} - 1$ делится на $a + 1$.

4) Докажите, что члены последовательности $1+3^{3^n}+9^{3^n}, n \geq 1$, попарно взаимно просты.

5) Докажите, что четные степени нечетных простых чисел нельзя представить в виде $\frac{x^2-1}{y^2-1}$, где x и y – натуральные числа.

6) Дано натуральное $n>2$. Число $a>n^2$ таково, что среди чисел $a+1, a+2, \dots, a+n$ есть кратные каждого из чисел $n^2+1,\ n^2+2, \dots, n^2+n$. Докажите, что $a>n^4-n^3$.

7) Докажите, что множество значений многочлена x^2+1 в целых точках не содержит бесконечной непостоянной геометрической прогрессии.

8) $P(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами степени больше 1. Докажите, что существует целочисленная бесконечная непостоянная арифметическая прогрессия, которая не содержит ни одного числа вида $P(k)$, где $k -$ целое число.

9) Докажите, что если $p = 4k+3$ — простое число, то уравнение $x^{2p}+y^{2p} = z^{2p}$ не имеет решений в натуральных числах, не кратных p.

10) Решите в целых числах уравнение $3^x+4^y=5^z$.

Конструктивы:

1) Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c, большие 1 и такие, что 2^a+1 делится на b, 2^b+1 делится на c, 2^c+1 делится на a?

2) Покажите, что для любого натурального n в выражении $\pm 1 \pm 2^2 \pm \dots \pm (m-1)^2 \pm m^2$ можно так подобрать m и расставить знаки, чтобы было верно равенство:

$$n = \pm 1 \pm 2^2 \pm \dots \pm (m-1)^2 \pm m^2$$

3) Докажите, что найдется набор из 2014 последовательных натуральных чисел, ни одно число в котором не равно степени натурального числа с показателем большим 1.

4) Радикалом натурального числа N (обозначается rad(N)) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, rad(120) = 2 · 3 · 5 = 30.

Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что A + B = C и C > 1000 · rad(ABC)?

5) Докажите, что существует бесконечно много пар различных натуральных чисел (m, n) таких, что у m и n одинаковые наборы простых делителей и у чисел $m+1$ с $n+1$ тоже одинаковые наборы простых делителей.

6) Докажите, что для любых натуральных n и k $(n+k > 2)$ существует число, представимое и как сумма n точных квадратов, и как сумма k точных квадратов, причём все $n+k$ квадратов различны.

7) На окружности с центром в целочисленной точке лежит точка, у которой обе координаты рациональные. Докажите, что тогда точек, у которых обе координаты рациональные, на этой окружности бесконечно много.